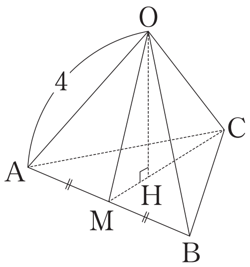
PART4　四面体の切り口

例題

1 辺の長さが 4 である正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から CM に垂線 OH を下ろす。

(1)　$\angle \mathrm{OMC} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　OH の長さを求めよ。



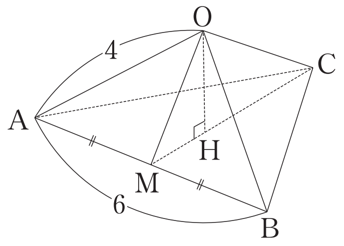
Point Pickup

練習

四面体OABCにおいて，OA＝OB＝OC＝4，AB＝BC＝CA＝6である。辺ABの中点をMとし，頂点OからCMに垂線OHを下ろす。

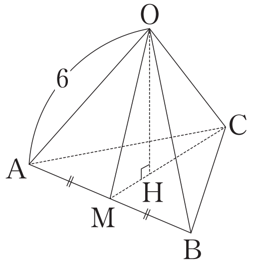
⑴　∠OMC＝θとするとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

⑵　OHの長さを求めよ。



第12講　PART4　確認問題

1 辺の長さが 6 である正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から CM に垂線 OH を下ろす。



1　∠OMC = θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$$\cos\theta = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

2　OH の長さを求めよ。

$$\mathrm{OH} = \boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$$

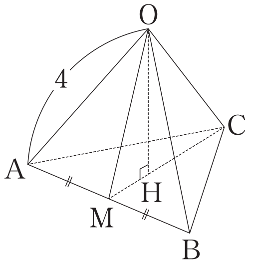
PART4　四面体の切り口

例題

1 辺の長さが 4 である正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から CM に垂線 OH を下ろす。

(1)　$\angle \mathrm{OMC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　OH の長さを求めよ。



(1)　$\angle \mathrm{OMA}=\angle \mathrm{OMB}=90^\circ$，$\angle \mathrm{OAM}=60^\circ$ より，$\triangle \mathrm{OAM}$ において

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OA}\sin 60^\circ=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

同様に　$\mathrm{CM}=2\sqrt{3}$

$\triangle \mathrm{OMC}$ において，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-4^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{8}{2^3\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

(2)　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって，$\triangle \mathrm{OMH}$ において

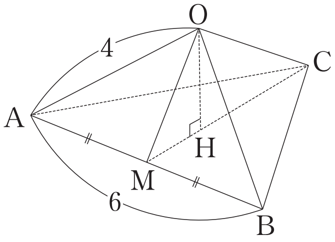
$$\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\theta=2\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

練習

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=4$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=6$ である。辺 AB の中点を M とし，頂点 O から CM に垂線 OH を下ろす。

(1)　$\angle \mathrm{OMC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　OH の長さを求めよ。



(1)　$\angle \mathrm{OMA}=\angle \mathrm{OMB}=90^\circ$，$\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=3$ より，$\triangle \mathrm{OAM}$ において

$$\mathrm{OM}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

$\angle\mathrm{CMA}=\angle\mathrm{CMB}=90^\circ$，$\angle\mathrm{CAM}=60^\circ$ より，$\triangle\mathrm{CAM}$ において

$$\mathrm{CM}=\mathrm{CA}\sin 60^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

$\triangle\mathrm{OMC}$ において，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{7})^2+(3\sqrt{3})^2-4^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{18}{6\sqrt{21}}=\frac{3}{\sqrt{21}}$$

(2)　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{21}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{3}{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

よって，$\triangle\mathrm{OMH}$ において

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\theta=\sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=2$$

第12講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：3

[解説]

$\angle\mathrm{OMA}=\angle\mathrm{OMB}=90^\circ$，$\angle\mathrm{OAM}=60^\circ$ より，

$\triangle\mathrm{OAM}$ において [A]

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OA}\sin 60^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

同様に　$\mathrm{CM}=3\sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{OMC}$ において，余弦定理より [A] [B]

$$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{18}{2\cdot 3^3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

［A］　四面体に含まれる三角形に注目し，三角比や余弦定理を利用し，三角形の辺の長さや高さ, 角度などを求める。

［B］　余弦定理

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

2

[正解] ウ：2，エ：6

[解説]

$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\triangle\mathrm{OMH}$ において [C]

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\theta=3\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$

［C］　四面体に含まれる三角形に注目し，三角比や余弦定理を利用し，三角形の辺の長さや高さ, 角度などを求める。